2

D. D.

THEOREMATA GENERALIA PRO DIMENSIONE FIGURARUM GEOMETRICARUM,

QUÆ,

Consensu Amplissimæ Facult. Philosoph. in Regia Acad. Aboënsi,

Publico examini modeste subjiciunt

AUCTOR

JOHANNES BILMARK,

PHIL. MAGISTER,

ET

RESPONDENS

JONAS LILJANDER,

SMOLANDUS.

Die VII. Junii Anni MDCCLV.
loco horisque ante meridiem consvetis.

ABOÆ, Impressit DIRECT. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

Nyka

S:æ R:æ M:tis

SUMMÆ FIDEI VIRO,

ILLUSTRISSIMO atq; CELSISSIMO

COMITI ac HEROI,

DN. CAROLO GUSTAVO TESSIN,

Regis Regnique Svethiæ SENATORI,

Cancellariæ Regiæ PRÆSIDI,

Supremo Aulæ MARESCHALLO,

Principis Succeſſoris GUSTAVI educationis MODERATORI,

Ordinum S:æ R:æ M:tis CANCELLARIO,

Ord. Seraphici & Aquilæ nigræ EQUITI,

Regiæ Academiæ Aboënſis CANCELLARIO,

MÆCENATI SUMMO.

ILLUSTRISSIME atque CELSISSIME

COMES,

DOMINE GRATIOSISSIME,

Felices admodum eas esse civitates cana censuit antiquitas, in quibus litteræ sedulo excolerentur, & ab ipsis Proceribus sollicite foverentur. Inter cæteras itaque prærogativas, de quibus nostra ætas sibi gratulatur, haud immerito referimus præsentem in patria litterarum florem. Cui autem, post REGES *nostros vere* MAGNOS, *hanc felicitatem potiori jure, quam* TIBI, Illustrissime Cancellarie, *debeamus, profecto invenimus neminem. Postquam enim Svethiam foris tutam reddideras, atque aurei nostri seculi firmissima posueras fundamenta; totus in id incubuisti, ut scientias utilissimas in merito honoris gradu collocares, atque earum cum artibus indivulsum ostenderes connubium. Igitur in litterarum umbraculis delitescentes, atque sua se virtute involventes, singulari* TUA *gratia in apricum producis,* TUA *auctoritate tueris, immo, quod sperare non audent, novum illis exoptatumque constituis fatum. Tanta beneficia quamvis remunerari nequeant Musæ, non tamen*

gratæ

gratæ esse desinent. Ut enim immortales ipsæ sunt, atque conservatoribus sui perpetuitatem famæ nunquam non præstant; ita TIBI *&* Grandi TUO Nomini *laudis æternitatem spondent, ut quanto serior posteritas exsurget, tanto majus cum annis* TUA *gloria capiat incrementum. Ibit certe in secula, fuisse Svethiæ* Heroa, *qui quum summos in Europa Status Ministros prudentia & amplitudine rerum gestarum non æquasset modo, sed longe etiam superasset; hanc tamen gloriam levem esse existimavit, nisi splendidissimis suis titulis etiam Nomen* MUSAGETÆ *adjecisset. Est,* Celsissime HEROS, *propensus hicce* TUUS *in scientias adfectus, qui effecit, ut incomta hæc theoremata in pignus devotissimi animi* TIBI *offerre,* TUOque illustri Nomine, *munire sustineam. Adspicias eadem fronte placida atque serena, & pro connata* TIBI *facilitate jubeas, tenues meas spes deciduis gratiæ* TUÆ *radiis reviviscere; certo persvasus, nullum unquam tempus memoriam tantæ gratiæ pio meo pectore fore obliteraturum. Vivas denique,* Mæcenas Gratiosissime, *diu & felicissime. Vivas, donec patriæ commodis, rei litterariæ incrementis & bonorum omnium votis abunde satisfeceris; sic enim* TUAM *ætatem non annis, sed seculis metiemur.*

ILLUSTRISSIMÆ EXCELLENTIÆ
TUÆ

subjectissimus cliens,
JOHANNES BILMARK.

S:Æ R:Æ M:TIS
MAGNÆ FIDEI VIRO,
REVERENDISSIMO PATRI ac DOMINO,

DN. ENGELBERTO HALENIO,

S. S. Theologiæ DOCTORI consummatissimo, diœceseos Skarensis EPISCOPO eminentissimo, Ven. Consist. PRÆSIDI gravissimo, Reg. ibidem Gymn. & Schol. EPHORO adcuratissimo,
MÆCENATI MAXIMO.

PRolixam Tuam, eminentissime PRÆSUL, *in litterarum cultores benivolentiam publice celebrant multi; eandem vero tacita veneratione prosequuntur plures. Substitit hactenus nostra erga Te,* Mæcenas Maxime, *pietas intra devoti cordis penetralia; indignatur autem has angustias animus gratus, & Tuorum beneficiorum in se suosque cumulatorum probe sibi conscium pectus. Permittas igitur,* reverendissime Episcope, *nobis has Meditationes Mathematicas, ceu humillimi obsequii indices, in sinum gratiæ* Tuæ *deponere, nostramq;* Tibi *fortunam de meliori nota commendare. Merita* Tua, *quorum nec magnitudo decempeda nostra definiri, nec numerus calculis nostris exprimi possit, aliis rite prædicanda relinquimus. Sufficiat dixisse, quod in solam Westro-Gothiam tanta eadem sint, ut toti in ære* Tuo *simus, utque eodem exsolvi nec possimus, si vellemus; nec velimus, si possemus, ne* Tu *bene de nobis mereri unquam desinas. Quanto itaque pretiosior nobis est* Tua *vita, tanto etiam calidiora pro* Tua *incolumitate erunt omnium nostrum vota.* Deus Te *quovis felicitatis genere cumulet, atque vegetam firmamque valetudinem* Tibi *largiatur, ut patriæ commodis & rei litterariæ incrementis quam diutissime sufficias.*

REVERENDISSIMI NOMINIS TUI
humillimus cliens,
JOHANNES BILMARK.

KONGL. MAJ:TS
Tro-Tjenare och Capitaine,
Wälborne

HERR CHRISTER BOIJE,

Höggunstige Herre,

DÅ jag eftersinnar de wälgjerningar jag af Wälborne Herr Capitainens gunstiga sinnelag fått erfara; påminner mig wäl min skyldighet dem offenteligen at berömma, men måste upricktigt widgå min stora oförmögenhet, at med tjenliga ord kunna uttrycka deras mångd och storlek.

Tillåt fördenskull, Höggunstige Herre, at detta Academiska arbete må wara en tolk, som lägger å daga, med hwad wördnadsfull årkänsla och djup tacksamhet jag anser den wälfärd och lycka, som jag leder ifrån Wälborne Herr Capitainens höga ynnest, och war försäkrad, at ingen tid, ehuru widrig den ock blir, skal hos mig kunna utplåna åtankan af Edor widsträckta godhet.

At Himmelen wille uppehålla Wälborne Herr Capitainen med des högtförnäma Famille wid alsjelfbegärlig sällhet och wälmågo, är den innerliga och trogna önskan, i hwilken, med djup wördnad, til döden framhärdar

Wälborne Herr Capitainens,

ödmiukaste tjenare,
JONAS LILJANDER.

Admodum reverende atq; præclarissime,

Dn. GUSTAVE ROTHOVI,

PASTOR & PRÆPOSITE in Pålkåne meritissime, vigilantissime,

A primo tempore, quo in notitiam Tui *veniendi ansam mihi benignior præbuit fortuna; tanta in me* Tua *exstiterunt beneficia, ut, nisi eadem non tantum venerabunda mente servare, sed data quoque occasione publice prædicare adniterer, turpem ingrati animi notam frustra sperarem effugere.*

Quum vero, quid, pro Tuis *in me meritis, reponam, præter hasce pagellas gratissimi animi testes, nihil habeam; enixe rogo atque obtestor, digneris,* Vir Admodum Reverende, *illas eodem respicere favore, quo me semper amplecti voluisti, id est, summo.*

De cætero ad supremum Numen, pro Tua *incolumitate ac perenni felicitate, calida fundere suspiria nunquam intermittet*

Admodum Reverendi NOMINIS TUI

cultor humillimus,
JONAS LILJANDER.

à

Monsieur de LILJANDER,

MONSIEUR,

EN-tre toutes les autres ſciences, les Mathematiques ſont celles, qui, par la juſteſſe des penſées, ont gagné une éſtime presque générale. On honore donc avec raiſon ceux, qui y ont fait des progrès. Outre la grande connoiſance que vous avez des belles lettres, vos progrès en Mathematiques ſont aſſez conſiderables. Vous en donnez, Monſieur, des preuves eclatantes par la ſavante diſſertation, que vous étes ſur le point de ſoutenir.

Permettez moi donc, Monſieur, de vous feliciter par avance de l' honneur que vous allez vous aquerir, & de vous faire connoitre l' avantage, que j' ai de trouver en votre perſonne un guide fidele, dont les ſages inſtructions ne peuvent être que très avantageuſes à mes études.

Puiſſe le ciel vous accorder une fortune digne du merite & des grands talens, que vous poſſedez. Je ſuis avec beaucoup d' amitié & d' éſtime

MONSIEUR

Votre très humble ſerviteur,

G. E. SILFVERSVAHN.

MONSIEUR,

JE me ferois un éternel reproche, ſi dans cette agréable occaſion je ne vous marquois, Monſieur, la joye, dont je ſuis penetré de la gloire, que vous êtes ſur le point d' aquerir en defendant cette diſſertation. Mais ma plume eſt trop foible pour pouvoir vous temoigner des obligations, que j'ai aux peines infinies, que vous avez priſes pour mes études & mon education.

Les ſouhaits que je fais en reconnoiſance, ſont, que la Tout puisſance daigne vous combler de toutes proſperités, & vous faire jouir d' une recompenſe proportionée à vos travaux aſſidus & à la profonde connoiſſance, que vous avez des belles lettres.

Je ſuis avec tout l' attachement imaginable

MONSIEUR

Votre très humble ſerviteur,

OTTO CHRISTER BOIJE.

D. D.

DImensiones figurarum duplici inprimis methodo investigare solent Mathematici, vel per principia Geometrica vel etiam per calculum infinitesimalem. Quanquam vero demonstrationes lineares ex fundamentis Geometricis deductæ, omnium præstantissimæ sint; attamen illæ hoc premuntur incommodo, quod quando ad dimensiones solidorum, etiam maxime simplicium, horumque superficierum sint applicandæ, adeo prolixæ evadant, ut minus exercitati lectoris attentio prius plerumque deficiat & obtundatur, quam ad demonstrationis finem perveniat. Cui accedit, quod hæ demonstrationes ut plurimum sint apogogicæ (vid. EUCLID. Libr. XII. & ARCHIMEDEM de Sphæra & Cylindro), quæ apodicticis omnino cedere debent; immo, quod hæc demonstrandi ratio ad solida ex quarumlibet figurarum rotatione genita vix unquam extendi queat. Ut hic defectus methodi Geometricæ tolleretur, summi Mathematici superioris seculi methodum fluxionum vel calculum infinitesimalem invenerunt, summoque studio excoluerunt. Hic calculus exhibet cujusvis figuræ planæ aream velut coalitam ex rectangulis numero infinitis, quorum alterum latus est figuræ semiordinata quædam, alterum pars axis infinitesima. Idem nobis sistit superficiem solidi, ut ortam ex innumeris rectangulis, quorum unum latus est peripheria, semiordinata quadam figuræ genetricis ut radio descripta, alterum vero pars infinite parva perimetri ejusdem figuræ. Quodlibet denique solidum constare intelligitur ex cylindrulis, quorum basis est circulus semiordinata ceu radio descriptus, altitudo pars axis infinitesima. Atque ex his principiis solutiones generales pro dimensionibus figurarum Geometricarum elici solent. Non tamen erit reticendum, quod incidant aliquando casus, quibus, nisi prædictis methodis principium quoddam Mechanicum, simplicissimum illud quidem, adjungamus, solutiones pro dimensionibus figurarum vel prolixas & inelegantes obtinemus, vel omnino nullas; idq; non solum pro *Ungvibus*, aliisq; figuris similibus; verum etiam in problematibus, quæ prima fronte absq; novo hoc subsidio solvi posse videbantur, cujus rei exempla suo loco erimus adducturi. Igitur, cum Geometram deceat, methodos omnes, quibus generales problematum solutiones erui queant, sibi perspectas habere; operæ pretium nos facturos existimavimus, si tertiam methodum, in ipsa figurarum genesi, non minus quam priores binas fundatam, specimine hocce Academico ex suis principiis succincte explicuerimus.

Definitio I. Sit linea recta vel vectis quidam, cujus particulis quibuscunque insint vires vel applicentur pondera, quæ partes has ad motum sollicitant, sitque porro in assumta linea punctum G tale, ut si idem fulcro cuidam imponatur, vires, quæ sunt ab una fulcri parte æquipolleant viribus in opposita parte, hoc punctum G *Centrum gravitatis* virium dicitur.

Defi-

Definitio II. *Momentum* est quodlibet productum ex vi data in suam a centro gravitatis distantiam.

PROPOSITIO. I. *Lemma. fig. I.*

Sit H2H *linea recta vel vectis inflexilis, cujus punctis* A, B, C, D, E, F, K, &c. *applicata sint pondera* α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η, *&c. quorum directiones sint inter se parallelæ, centrumq; gravitatis commune habeant in G; dico, quod summa momentorũ ab una centri G parte erit æqualis summæ momentorũ ab altera ejusdem parte, hoc est (per defin. II.)* $\alpha.AG+\beta.BG+\gamma.CG+\delta.DG=\epsilon.EG+\zeta.FG+\eta.KG$.

Hanc ipsam propositionem passim in systematibus Mathematicis demonstratam reperire licet.

PROPOSITIO. II. *Problema.*

Iisdem positis, ac in propositione præcedenti; sit invenienda summa productorum ex quolibet pondere in suam distantiam ab assumto vectis puncto H.

Casus hujus problematis ad duos commode referri possunt, prout videlicet singula pondera vel ad eandem puncti H partem, vel etiam ad diversas fuerint, utrumque exhibuimus fig. 1. & fig. 2.

Casus I. fig. 1. Quoniam in G est centrum gravitatis commune ponderum (per hypoth.); erit, per propositionem primam, $\alpha.AG+\beta.BG+\gamma.CG+\delta.DG=\epsilon.EG+\zeta.FG+\eta.KG$; vel etiam $\alpha.AG+\beta.BG+\gamma.CG+\delta.DG-\epsilon.EG-\zeta.FG-\eta.KG=0$. Est autem $AG=HG-HA$; $BG=HG-HB$; $CG=HG-HC$; $DG=HG-HD$; $EG=HE-HG$; $FG=HF-HG$; $KG=HK-HG$. Consequenter erit $\alpha.HG+\beta.HG+\gamma.HG+\delta.HG+\epsilon.HG+\zeta.HG+\eta.HG-\alpha.HA-\beta.HB-\gamma.HC-\delta.HD-$

$\varepsilon.HE - \zeta.HF - \eta.HK = 0$; ex qua porro æquatione obtinemus $\alpha.HA + \beta.HB + \gamma.HC + \delta.HD + \varepsilon.HE + \zeta.HF + \eta.HK = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta}.HG$

Theorema: In vecte, cujus singula pondera ad eandem puncti dati partem sunt suspensa, erit summa productorum ex quolibet pondere in suam distantiam ab hocce puncto, æqualis facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis communis ab eodem vectis puncto.

Casus. II. fig. 2. Per eadem principia, quæ in casu priori adhibuimus, pervenimus ad hanc æquationem $\alpha.AG + \beta.BG + \gamma.CG + \delta.DG - \varepsilon.EG - \zeta.FG - \eta.KG = 0$. Hic autem est $AG = AH + HG$; $BG = BH + HG$; $CG = HG - HC$; $DG = HG - HD$; $EG = HE - HG$; $FG = HF - HG$; $KG = HK - HG$. Ergo etiam erit $\alpha.HG + \beta.HG + \gamma.HG + \delta.HG + \varepsilon.HG + \zeta.HG + \eta.HG + \alpha.HA + \beta.HB - \gamma.HC - \delta.HD - \varepsilon.HE - \zeta.HF - \eta.HK = 0$; ex qua æquatione rursus elicimus $-\alpha.HA - \beta.HB + \gamma.HC + \delta.HD + \varepsilon.HE + \zeta.HF + \eta.HK = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta}.HG$.

Theorema: Si in vecte pondera quotcunque ad diversas puncti dati partes sint constituta; erit excessus, quo facta ex singulis ponderibus ad partes centri omnium gravitatis G sitis in suas a puncto H distantias, excedunt facta ex reliquis ponderibus in suas ab eodem puncto distantias, æqualis facto ex summa omnium ponderum in distantiam centri gravitatis communis a puncto H.

Nihil refert, qualem situm vectis H2H habuerit, modo

modo reliquæ conditiones eædem maneant, adeoque pro qualibet vectis positione vera erunt nostra theoremata.

COR. I. Si itaque pondus quodvis ad partes centri gravitatis communis suspensum sit v; pondus autem in opposita parte constitutum sit w; distantia cujuslibet ponderis a dato vectis puncto fuerit x, centri vero gravitatis distantia ab eodem puncto z, summam deniq; quamcunq; $\int$ indicet; erit in casu priori hujus Propositionis $\int xv = z.\int v$; atque $z = \int xv : \int v$. In posteriori autem casu $\int xv - \int xw = z.\overline{\int v + w}$; ergo $z = (\int xv - \int xw) : \overline{\int v + w}$. Hi valores pro z totidem sunt formulæ, quæ inserviunt inveniendæ distantiæ centri gravitatis ab assumto puncto in vectibus quibuscunque.

COR. II. Si vectis H2H ejusdem ubiq; gravitatis ponatur, tum loco ponderum substitui possunt partes vectis infinitesimæ seu dx; adeoq; $v = dx$. Sed, per COR. præcedens, in priori problematis casu est $z.\int v = \int xv$; ergo erit $z\int dx = \int xdx$. seu $zx = \frac{1}{2}xx$; adeoq; $z = \frac{1}{2}x$. hoc est, centrum gravitatis vectis homogenei cadit in medio ipsius.

PROPOSITIO III. *Problema. fig. 3. 4.*

Si pondera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$, *Prop. I. concipiantur a suis vectibus recedere, atque juxta directiones parallelas & ad vectes perpendiculares uniformiter moveri, ita ut vel singula simul descendant, vel ita, ut nonnullis descendentibus alia adscendant, perveniantq; pondera intra datum tempus in* a, b, c, d, e, f, k, *respective, & centrum* *gravitatis eorum ex G in L; invenienda est summa productorum ex quolibet pondere in suam distantiam a vecte.*

Ex singulis punctis a, b, c, d, e, f, k, in quæ ponderis cujusvis centrum gravitatis motu suo pervenisse intelligitur, demittantur in viam centri gravitatis communis GL, quantum opus sit, productam normales ai, bl, cm, dn, er, fo, kq. Quoniam itaq; $\alpha.Aa = \alpha.Gi$, $\beta.Bb = \beta.Gl$; &c. producta ex quolibet pondere in suam distantiam a vecte erunt eadem, sive pondera sint in a, b, &c. sive in i, l, &c. Sint igitur pondera in i, l, m, n, &c. quo posito, habemus vectem Gq ponderibus α, β, γ, δ, &c. oneratum in i, l, m, n, &c. quorum commune gravitatis centrum est in L, & G punctum in vecte Gq assumtum. Ergo in

Casu I. fig. 3. Si omnia pondera versus eandem vectis partem moveantur; (per casum 1. Prop. II.) erit $\alpha.Gi + \beta.Gl + \gamma.Gm + \delta.Gn + \varepsilon.Gr + \zeta.Go + \eta.Gq = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta}.GL$. Consequenter etiam, per modo demonstrata, erit $\alpha.Aa + \beta.Bb + \gamma.Cc + \delta.Dd + \varepsilon.Ee + \zeta.Ff + \eta.Kk = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta}.GL$.

Theorema: Si pondera quotcunq; ad eandem vectis positione dati partem in directionibus ad illum normalibus moveantur; erit summa productorum ex quolibet pondere in suam distantiam a vecte, æqualis facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis illorum ab eodem vecte.

Casu II. fig. 4. Si pondera ad diversas vectis propositi H2H partes moveantur; vectis Gq oneratus erit ponderibus ad contrarias puncti G partes constitutis; ergo

ergo erit $-\alpha.Gi-\beta.Gl+\gamma.Gm+\delta.Gn+\varepsilon.Gr+\zeta.Go+\eta.Gq=\overline{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta}.GL$. per caſ. 2. Prop. II. Ergo $-\alpha.Aa-\beta.Bb+\gamma.Cc+\delta.Dd+\varepsilon.Ee+\zeta.Ff+\eta.Kk=\overline{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta}.GL$.

Theorema: Si pondera quotcunque ad contrarias vectis dati partes, ſed in directionibus ad illum perpendicularibus moveantur; exceſſus, quo facta ex ſingulis ponderibus ab illa vectis parte conſtitutis, in qua centrum gravitatis commune L hæret, in ſuas ab eodem vecte diſtantias, excedunt ſummam ſimilium factorum ab altera vectis parte ſumtorum, æquabitur facto ex ſumma ponderum in diſtantiam centri gravitatis eorundem a dicto vecte.

COR. I. *fig.* 3. 4. Si ponderum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$, directiones $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, Kk$, non ſint perpendiculares in vectem H2H, eædem tamen inter ſe parallelæ fuerint, quomodocunque de cætero inclinatæ; ex ſingulis punctis a, b, c, d, e, f, k, L, demittantur in H2H normales $ag, bg, cg, dg, eg, fg, kg, Lg$, quarum linearum poſitiones ex inſpectione fig. 3. & 4. facile colligi poſſunt. Habemus itaq; triangula rectangula ſimilia Aag, Bbg, Ccg, Ddg, GLg, &c. Ergo $\alpha.ag:\alpha.Aa::\beta.bg:\beta.Bb::\gamma.cg:\gamma.Cc::\delta.dg:\delta.Dd::\varepsilon.eg:\varepsilon.Ee::\zeta.fg:\zeta.Ff::\eta.kg:\eta.Kk::Lg:GL$. Hinc $(\pm\alpha.ag\pm\beta.bg+\gamma.cg+\delta.dg+\varepsilon.eg+\zeta.fg+\eta.kg):(\pm\alpha.Aa\pm\beta\,Bb+\gamma.Cc+\delta.Dd+\varepsilon.Ee+\zeta.Ff+\eta.Kk)::Lg:GL::(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)Lg:(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)GL$. Enimvero per præſentem Propoſitiositionem, si uterq; casus ad unam formulam redigatur, est $\pm \alpha . ag \pm \beta . bg + \gamma . cg + \delta . dg . + \varepsilon . eg + \zeta . fg + \eta . kg = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta) Lg$. Consequenter erit $\pm \alpha . Aa \pm \beta . Bb + \gamma . Cc + \delta . Dd + \varepsilon . Ee + \zeta . Ff + \eta . Kk = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta) GL$. Ex quibus consequitur, theoremata hujus propositionis non solum convenire distantiis ponderum a vecte; sed etiam ad vias ponderum inter se parallelas extendi posse.

Cor. II. *fig.* 5. Quod si pondera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. post descensum vel adscensum per directiones Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. moveri cogantur juxta lineas ar, br, cr, dr, er, &c. ad priores directiones æqualiter inclinatas, ipsisque proportionales; evidens est, quod via centri gravitatis communis ponderum erit secundum GLr, posito ang. $GLr =$ ang. Aar. Porro, ut summa productorum ex singulis ponderibus in suas respective vias Aar, Bbr, &c reperiatur; ponamus quod centra gravitatis hocce motu pervenerint in r, & construantur triangula rectangula $a\Phi r$, $b\Phi r$, $c\Phi r$, $d\Phi r$, $L\Phi r$, &c. quæ insuper erunt inter se similia. Sed, per Cor. præcedens, est $\pm \alpha . Aa \pm \beta . Bb + \gamma . Cc + \delta . Dd + \varepsilon . Ee +$ &c. $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ &c$) GL$. Itemq; $\pm \alpha . A\Phi \pm \beta . B\Phi + \gamma . C\Phi + \delta . D\Phi + \varepsilon . E\Phi +$ &c. $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ &c.$) G\Phi$. Ergo etiam erit $\pm \alpha . a\Phi \pm \beta . b\Phi + \gamma . c\Phi + \delta . d\Phi + \varepsilon . e\Phi +$ &c. $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ &c.$) L\Phi$. Et propter triangula $a\Phi r$, $b\Phi r$, $c\Phi r$, $d\Phi r$, $L\Phi r$, &c. similia; erit $\alpha . a\Phi : \alpha . ar :: \beta . b\Phi : \beta . br :: \gamma . c\Phi : \gamma . cr :: \delta . d\Phi : \delta . dr :: \varepsilon . e\Phi : \varepsilon . er :: L\Phi : Lr$. Consequenter $(\pm \alpha . a\Phi \pm \beta . b\Phi + \gamma . c\Phi + \delta . d\Phi + \varepsilon . e\Phi +$ &c.$) : (\pm \alpha . ar \pm \beta . br + \gamma . cr + \delta . dr + \varepsilon . er +$ &c.$) ::$

$L\Phi$:

$L\Phi : Lr :: (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.) L\Phi : (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.) Lr$. Sed antecedentes hujus analogiæ termini ſunt æquales, per modo demonſtrata; erit igitur $\pm \alpha . ar \pm \beta . br + \gamma . cr + \delta . dr + \varepsilon . er + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.) Lr$. Sed $\pm \alpha . Aa \pm \beta . Bb + \gamma . Cc + \delta . Dd + \varepsilon . Ee + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.) GL$; Si itaque binæ hæ æquationes in unam ſummam colligantur; obtinebimus $\pm \alpha . Aar \pm \beta . Bbr + \gamma . Ccr + \delta . Ddr + \varepsilon . Eer + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.) GLr$. Et quoniam quicquid de lineis Aar, Bbr, Ccr, &c. demonſtravimus, idem pari ratione aliis quotcunque lineis æqualiter ad ſe inclinatis, adeoque polygonis ſimilibus applicari poteſt; ſequitur

Cor. III. Si pondera quotcunq; moveantur in polygonis ſimilibus, vel in curvis ejusdem ſpeciei, (curvæ enim conſiderari poſſunt inſtar polygonorum infinite parvorum laterum) & ſingula verſus eandem vectis partem tendant; erit ſumma productorum ex quolibet pondere in ſuam viam, æqualis facto ex ſumma ponderum in viam centri gravitatis eorundem. Sin vero ad oppoſitas vectis partes ferantur; exceſſus, quo facta ex ſingulis ponderibus ad partes centri omnium gravitatis conſtitutis in ſuas vias, excedunt facta ex reliquis ponderibus in ſuas vias, æquabitur facto ex ſumma ponderum in viam centri gravitatis communis.

Cor. IV. *fig.* 6. Si pondera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, &c. non recedant a ſuis vectibus, ſed ad illos accedant; idq; vel ita, ut ſingula ſimul accedant ad vectem H2H, vel ea ratione, ut nonnullis $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, &c. ad vectem accedentibus, alia δ, ζ, &c. ab eodem recedant; omnia vero ad eandem vectis H2H partem parallele moveantur; Sit h1h vectis quidam, a quo singula pondera α, β, γ, δ, &c. recedant; erit per Cor. I. & III. hujus Prop. $\alpha.\alpha a + \beta.\beta b + \gamma.\gamma c + \delta.\delta d + \varepsilon.\varepsilon e + \zeta.\zeta f + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \&c.)\, gL$. Et $\alpha.\alpha A + \beta.\beta B + \gamma.\gamma C + \delta.\delta D + \varepsilon.\varepsilon E + \zeta.\zeta F + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \&c.)\, gG$. Ergo etiam $\alpha.aA + \beta.bB + \gamma.cC \pm \delta.dD + \varepsilon.eE \pm \zeta.fF + \&c. = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \&c.)\, GL$. Ex quibus porro æquationibus, theoremata illis similia eliciuntur, quæ in hac ipsa Propos. hujusque Cor. III. enunciavimus, habita tantum ratione differentiæ conditionum in casibus propositis.

Cor. V. *fig.* 7. Hæc ipsa sufficiant pro ponderibus, quando illa moventur juxta lineas similes, parallelas & numero pares. Ut generale magis fiat præsens problema, sint jam lineæ numero impares, atque in *a*, *b*, *c*, *d*, quatuor pondera α, β, γ, δ; quorum δ descendit per unam lineam, qua emensa motus ejus sistitur, γ per duas, β per tres, α per quatuor lineas moveantur, antequam quiescant. Sint vero primæ linæ *a1a*, *b1b*, *c1c*, &c; itemque secundæ *1a2a*, *1b2b*, &c. & sic porro, cujusvis ponderis inter se parallelæ. Sit *g1g* via centri gravitatis ponderum, dum hæc descendunt per primas lineas; *1g2g* via ejusdem in motu ponderum per secundas lineas, & ita in cæteris; erit *g1g* parallela ad *a1a*, *1g2g* ad *1a2a*, &c; consequenter per Cor. I. & III. hujus Prop. erit $\alpha.a1a + \beta.b1b \pm \gamma.c1c \pm \delta.dD = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).\, g1g$. Sed cum pondus δ ulterius non moveatur, erit ejus

via

via in posterum exponenda per zero. Ergo per Cor. citt. erit $\alpha.1a2a + \beta.1b2b \pm \gamma.1cC \pm \delta.0 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,1g2g$. Similiter $\alpha.2a3a + \beta.2bB \pm \gamma.0 \pm \delta.0 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,2g3g$. Et $\alpha.3aA = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,3gG$. His denique æquationibus in unam summam collectis, erit $\alpha.\,a1a2a3aA + \beta.\,b1b2bB + \gamma.\,c1cC \pm \delta.\,dD = (\alpha + \beta + \gamma + \delta.)\,g1g2g3gG$. Ex quibus consequitur, theoremata Cor. III. vera esse, quamvis ponderum viæ numero essent impares.

Cor VI. *fig.* 5. Hactenus supposuimus pondera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. in eodem plano, sed secundum diversas directiones moveri. Convenit jam investigare quid fiat, si in diversis ferantur planis. Cogitemus itaque dicta pondera recedere a vecte H2H, atque in plano tabulæ nostræ moveri, donec perveniant in a, b, c, d, e, &c. Hoc facto fiat ponderum motus juxta lineas ar, br, cr, dr, er, &c. ad planum tabulæ vel normales vel saltim æqualiter inclinatas, ut plana viarum sint parallela. Ulterius singula pondera vel simul versus eandem moveantur plani partem, vel ea ratione, ut, nonnullis descendentibus, alia adscendant; erit via centri gravitatis ponderum secundum Lr parallelam ad ar. Retenta igitur eadem figuræ constructione, quam Cor. II. dedimus, per hoc Cor. erit $\pm\alpha.a\phi \pm \beta.b\phi + \gamma.c\phi + \delta.d\phi + \varepsilon.e\phi +$ &c. $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ &c.$)\,\mathrm{L}\phi$. Consequenter, si calculus adhuc in modum Cor. II. continuetur, erit etiam $\pm\alpha.ar \pm \beta.br + \gamma.cr + \delta.dr + \varepsilon.er +$ &c. $= (\alpha. + \beta. + \gamma. + \delta. + \varepsilon. +$ &c.$)\,\mathrm{L}r$. Quicquid itaque de motu ponderum in eodem plano in antecedentibus demonſtravimus; idem quoque valet de planis diverſis ſed parallelis.

Cor. VII. *fig.* 3. 4. 5. Ponamus pondera toties nominata eſſe ſingula inter ſe æqualia, atque numerus eorundem dicatur N; erit per Cor. præcedentia $\pm$ $Aa \pm Bb + Cc + Dd + Ee + Ff + Kk +$ &c. $=$ N. GL. Hoc eſt, ſi pondera æqualia ad eandem vectis vel plani dati partem moveantur, ſumma viarum a ſingulis ponderibus emenſarum erit multiplum viæ, quam commune gravitatis centrum interea abſolvit, ſecundum ponderum numerum. Sin autem verſus oppoſitas vectis aut plani dati partes moveantur pondera æqualia; exceſſus, quo viæ illorum ponderum, quæ ad partes omnium centri gravitatis poſita ſunt, excedunt vias eorum ponderum, quæ ſunt in parte oppoſita, erit viæ communis centri gravitatis multiplum, ſecundum ponderum α, β, γ, δ, &c. numerum.

Cor. VIII. Si pondus quodlibet a vecte H2H digreſſum & verſus partes centri gravitatis ponderum motum dicatur v, pondus autem quodvis ad oppoſitas vectis partes latum nuncupetur w, via cujuslibet ponderis ſit y, ſive hæ viæ ſint lineæ rectæ ſive curvæ, poſita via centri gravitatis communis $= z$; erit per Corollaria præcedentia in caſu priori hujus Prop. $\int yv = z. \int v.$, atq; $z = \int yv : \int v$; at in caſu poſteriori $\int yv - \int yw = z. \overline{\int v + w}.$ & $z = (\int yv - \int yw) : \overline{\int v + w}.$

Pro-

PROPOSITIO IV. *Theorema. fig. 8.*

Quadratura figuræ planæ eſt æqualis facto ex linea genetrice in viam, quam centrum gravitatis particularum omnium hujus lineæ interea deſcripſit, donec formata fuit figura.

Figura quævis concipi poteſt hoc modo generari. Sit HG2H linea recta, quæ in partes infinite parvas & æquales mn, nr, rs, tv, &c. diviſa intelligatur, ſingulisque his partibus æqualis indita ſit vis ſeſe verſus datam plagam in directionibus ad H2H normalibus movendi. Ulterius quælibet particula velut mn ſeparetur a ſuo nexu cum cæteris, ut libere moveatur per $m\mu$, donec in ſitum $\mu\nu$ perveniat, ſimiliterque reliquæ nr, rs, tv, &c. perveniant in $\nu\varrho$, $\varrho\sigma$, $\tau\upsilon$, &c; adeo ut $\mu\nu$ cum $\nu\varrho$, $\nu\varrho$ cum $\varrho\sigma$ & ita porro, vel in directum jaceat, vel angulum faciat infinite magnum, quo quidem poſteriori caſu ipſæ $\mu\nu$, $\nu\varrho$, $\varrho\sigma$, &c. in curvam H$\sigma\upsilon$ ſe diſponent. Sit centrum gravitatis particularum lineæ H2H ab initio motus in G, quod interea dum ipſæ particulæ deſcendunt per figuræ ſemiordinatas, movetur per GL. Igitur, cum particulæ propter inſitam ſeſe movendi vim conſiderari poſſint inſtar totidem ponderum, erit (per Prop. III.) $mn.m\mu + nr.n\nu + rs.r\varrho + tv.t\tau +$ &c. $= mn + nr + rs + tv +$ &c. GL. Eſt autem $mn.m\mu =$ rec—lo $m\nu$; $nr.n\nu =$ rec—lo $n\varrho$; & ſic in cæteris, atque $mn + nr + rs +$ &c. $=$ lineæ H2H. Ergo ſumma omnium rectangulorum $m\nu$, $n\varrho$, $r\sigma$, &c. $=$ H2H. GL; hoc eſt, quadratura figuræ planæ eſt æqualis facto ex axe vel linea genetrice in viam, quam centrum gravitatis particularum hujus lineæ describit, dum figura formatur. Q. e. d.

Idem Analytice sic demonstratur. Quoniam per Cor. VIII. Prop. III. est $\int yv = GL. \int v$; Sit portio quælibet axis $H2H = x$; erit in nostro casu $v = dx$, adeoque $\int ydx = GL. \int dx = GL. x$. Et si integra consideretur figura; erit $x = H2H$. Ergo $\int ydx = H2H. GL$. Est autem $\int ydx$ formula pro quadratura figurarum (per Calcul. Infinit.); constat itaque propositum.

Scholion. Si curva non concavitatem, sed convexitatem axi H2H obverteret, eodem tamen modo (vi Cor. IV. Prop. III.) demonstratur, spatium mixtilineum Hσ2H esse æquale facto ex tangente vel asymptoto H2H, ceu linea genetrice, in viam centri gravitatis elementorum genetricium. Si semiordinatæ essent portiones ejusdem curvæ similes & æquidistantes; erit adhuc harum figurarum area æqualis facto ex axe in viam centri gravitatis elementorum genetricium; modo in utroque casu reliquæ conditiones ipsius propositionis IV. eædem maneant. Immo, si linea genetrix integra maneat, atque circum datum polum volvatur, sive ejus longitudo semper eadem fuerit, sive illa continuo mutetur, idem erit theorematis præsentis tenor, ut ex Cor. III. Prop. III. satis colligi potest.

Cor. I. *fig. 9.* Sit H2H curva quædam, cujus centrum gravitatis est in C, atque ulterius concipiamus totam hanc curvam evolvi, incipiendo ab H, donec perveniat in situm rectum *h*2H, qua evolutione extremitas H describat curvam HG*h*. Dico,

spa-

ſpatium mixtilineum inter evolutam H2H, curvam ex evolutione deſcriptam HG*h* & radium oſculi *h*2H interceptum eſſe æquale facto ex evoluta H2H in C*c* ſeu viam, quam centrum gravitatis curvæ H2H, durante evolutione deſcribit, hoc eſt H2H*h*H = H2H. C*c*. Evidens eſt, quod area, quam evoluta motu ſuo verrit, eadem erit cum illa area, quam radius oſculi *h*2H deſcriberet, ſi ille circum curvam H2H convolvatur. Ut vero radius *h*2H dicto modo convolvatur, concipiamus illum in ſingulis ſui punctis *m*, *n*, &c. a viribus æqualibus & parallelis urgeri; quo poſito, erit *h*2H vectis homogeneus, cujus centrum gravitatis eſt in *c* medio ipſius *h*2H, Cor. II. Prop. II. Poſt aliquod tempus perveniat radius in ſitum G*i*, tum adhuc circum elementum curvæ I*i* convolvatur; hocce motu puncta *m*, *n*, &c lineæ G*i*, quæ pro totidem haberi poſſunt pondusculis, ipſorumque centrum gravitatis O, deſcribent arcus circulares ſimiles *m*μ, *n*ν, O*o*, &c, qui, ob parvitatem ſectoris G*ig*, pro lineis rectis parallelis habebuntur. Contorqueatur adhuc radius *ig* circum elementum *ia*, donec obtineat ſitum *a*A; hoc motu pondera *m*, *n*, &c. ipſorumque gravitatis centrum *o* conficient lineas parallelas μ*u*, ν*v*, *o*ω, &c; quod cum ſemper ita ſit, ſequitur, quod viæ, quas partes radii ſimul motæ deſcribunt, erunt inter ſe parallelæ. Porro ſit *bd* portio viæ, quam centrum gravitatis evolutæ eo tempore abſolvit, quo radius oſculi G*i* verrit ſectorem G*ig*; erit *bd* parallela ad O*o*; conſtat enim, quod via centri gravitatis communis duorum corporum, quorum

unum

unum quiescit, alterum movetur, sit parallela ad viam corporis moti. Enimvero primum radii $b2H$ elementum, quod adjacet puncto 2H descendit per unicam lineam, huic proximum per duas, & ita porro, atque primæ lineæ sunt inter se, secundæ itidem inter se parallelæ & sic in cæteris. Ergo hocce theorema convenit cum Cor. V. Prop. III. cujus formula $\alpha . 3aA = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \delta} . 3gG$ præsenti instituto applicata dabit $\alpha =$ radio Gi, $3aA = Oo$; $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ radio $b2H = H2H$ (ob radium osculi evolutæ suæ æqualem); atque $3gG = bd$. Ergo erit $Gi . Oo = H2H . bd$; Et, sumtis integralibus, $\int Gi . Oo = \int H2H . bd = H2H . \int bd$ (ob H2H constantem). Est autem $Gi . Oo =$ sectori $Gig =$ elemento areæ quæsitæ per hanc Prop.; adeoq; $\int Gi . Oo$ æquatur areæ H2HbH, & insuper $\int bd = Cc$; Ergo $H2HbH = H2H . Cc$.

Cor. II. *fig. 10.* Sit CED curva, quæ punctum recurvi habet in E, hoc est, cujus utraque pars simul vel concavitatem vel convexitatem lineæ AEB obvertit, sitque Ff via centri gravitatis elementorum genetricium, prorsus ut in ipsa propositione diximus: Dico: quod si semiordinatæ AC & BD figuræ CED sint parallelæ & in AB normales, erit spatium ACEDB æquale rectangulo AB. Ff. Etenim sint γ & g centra gravitatis elementorum genetricium in figuris ACE & EDB; erunt horum centrorum viæ $r\gamma$ & Gg parallelæ, & Ff ipsis æquidistans. Si itaque in centris γ & g concipiantur duo pondera γ, g, quæ inter se eandem habent proportionem ac AE ad EB; evidens est quod horum centrum gravitatis commune coincidet

cum

cum f. Ergo, vi Prop. III. ejusque Cor. III, erit $\gamma. r\gamma + g. Gg = \overline{\gamma + g}. Ff$. Et, si loco ponderum γ & g substituantur AE & EB, erit AE. $r\gamma$ + EB. $Gg = \overline{AE + EB}. Ff$. Est autem, per hanc Prop. ejusque Schol. AE. $r\gamma$ = spatio ACE; & EB. Gg = spat. BED. Ergo spat. ACEDB = ACE + EDB = AB. Ff.

Cor. III. *fig.* 11. Si autem curva punctum flexus contrarii habeat in E, ipsaque axem transeat ut CED; sit Ff via centri gravitatis elementorum genetricium. Dico: quod si semiordinatæ AC, BD sint parallelæ & normales in AB, erit differentia spatiorum EDB & ACE æqualis rectangulo AB. Ff. Sint enim g & γ centra gravitatis elementorum genetricium in figuris EDB & ACE; erunt horum centrorum viæ Gg & $r\gamma$ parallelæ, & Ff ipsis æquidistans. Igitur, si ea huc applicentur, quæ in Cor. præced. demonstravimus, tum, quoniam elementa genetricia ad oppositas moventur partes, erit per Prop. III. ejusque Cor. III. $\pm$ EB. $Gg \mp$ AE. $r\gamma = \overline{AE + EB}. Ff$. At, per præsentem Prop. est EB. Gg = spat. BED; AE. $r\gamma$ = spat. AEC; consequenter etiam est $\pm$ BED $\mp$ AEC = rectangulo AB. Ff. Sin vero curva axem non transeat, ut HED, quo quidem in casu altera pars DE convexitatem, altera HE concavitatem axi AB obvertet; sit DK axis curvæ DE, & eodem modo demonstrabitur per Cor. IV. Prop. III. esse $\pm$ EDK $\mp$ AHE = $\overline{DK + AE}. f\phi$; posita $f\phi$ via centri gravitatis communis elementorum genetricium utriusque figuræ.

Cor. IV. *fig.* 10 *&* 11. Si denique figuræ EDB & ECA intelligantur generari per evolutionem curvarum ED & EC ejusdem ubique curvedinis, quæ quidem lineæ in fig. 10. convexitatem axi AEB obvertent, lineæque adeo terminatrices DB & CA fuerint curvæ ex evolutione descriptæ; nihilominus tamen in curvis punctum recurvi habentibus, erit per Cor. I. & II. hujus Prop. EDB + ECA = rec-lo AB. Ff. At in curvis punctum flexus contrarii habentibus per Cor. I. & III. Prop. cit. erit ± EDB ∓ ECA = rec-lo AB. Ff.

Propositio. V. *Theorema. fig. 12.*

Superficies solidi est æqualis facto ex perimetro figuræ genetricis in viam, quam centrum gravitatis perimetri interea absolvit, dum superficies formatur.

Superficies alterutro fere sequentium modorum generari concipitur. I:o Perimetrum figuræ genetricis BADF dividatur in partes infinite parvas CD, FH, &c, quæ a viribus quibuscunque ad motum sollicitatæ ita moventur, ut ad directiones C*c*, D*d*, F*f*, H*h*, &c. parallelas semper sint normales; quo posito, lineolæ CD, FH, &c motu suo describent superficiem. Elementa autem genetricia pro totidem ponduscúlis haberi possunt, quæ a plano BADF recedendo descendunt ad planum baseos *badf*; quare, si centrum gravitatis ipsorum, quod est in G, simul descendat per G*g*; erit per Cor. VI. Prop. III. ∫CD. C*c* = G*g*. ∫CD. Sed ∫CD. C*c* seu summa omnium rectangulorum CD. C*c* est æqualis superficiei solidi A*ab*B; atque ∫CD æquatur perimetro figuræ genetricis BADF. Constat itaque propositum. Idem erit theorematis hujus tenor, sive elementa genetricia descendant per lineas rectas, ut in præsenti casu, sive per arcus curvarum similes & æquidistantes.

II:o Su-

II:o Superficies sequenti quoque ratione generatur. Sit $GgbB$ rectangulum vel alia quædam figura, cujus axis est recta linea Gg, circum quem tota figura circumvolvatur, quo motu linea Bb superficiem quandam conficiet. Dividatur Bb in partes infinite parvas & æquales mn, rs, &c, quarum commune gravitatis centrum est in γ; evidens est, quod in rotatione figuræ elementa mn, rs, &c moventur in peripheriis, quarum plana sunt inter se & plano, in quo centrum gravitatis γ movetur, parallela. Sit π peripheria circuli, figuræ $GgbB$ semiordinata ut radio, descripta, p autem peripheria quam centrum γ conficit. Igitur cum elementa mn, rs, &c pro totidem ponderibus haberi possint; per Cor. VI. Prop. III. erit $\int \pi . mn = p . \int mn$. Est autem $\int \pi . mn$ seu summa omnium zonularum $\pi\ mn$ æqualis integræ superficiei; atque $\int mn$ æquatur magnitudini genetrici Bb; consequenter superficies erit æqualis facto ex magnitudine genetrice Bb in viam, quam centrum gravitatis ejusdem interea percurrit, dum superficies formatur. Q. *e*. *d*.

Idem Analytice sic demonstratur. Sit figuræ genetricis abscissa x, semiordinata y, ratio radii ad peripheriam $r : p$; erit peripheria semiordinata ceu radio descripta $py : r$. Enimvero per Cor. VIII. Prop. III. est $\int yv = z . \int v$. Et in nostro casu est $y = py : r$; $z = pz : r$; atque $v =$ parti infinitesimæ perimetri $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ergo $\int py \sqrt{dx^2 + dy^2} : r = pz . \int \sqrt{dx^2 + dy^2} : r$. Quare cum $\int py \sqrt{dx^2 + dy^2} : r$ sit formula pro dimetiendis superficiebus, & $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sit perimetrum figuræ genetricis (per princ. Algebr.); rurſus noſtro theoremati ſua conſtat veritas.

Cor. I. *fig.* 11. Fingamus planum figuræ HAEDB eſſe ad planum tabulæ hujus normale, atque per E tranſire axem, qui etiam eſt ad tabulam normalis, circa quem planum HAEDB moveatur; tum evidens eſt, quod curvæ HA & DB hac rotatione in oppoſitas ferentur partes, atque motu ſuo ſuperficies deſcribent, quarum ſtantes lineæ ſunt curvæ ipſis HA & DB æquales, transverſæ autem arcus circulares ſimiles & paralleli $\varrho\sigma$ & rs. Dico: differentiam harum ſuperficierum eſſe æqualem rectangulo ex HA + DB in li viam centri gravitatis communis curvarum ſub formatione ſuperficierum. Sint o & O centra gravitatis curvarum AH & DB, quæ in rotatione plani HAEDB deſcribent arcus ſimiles & æquidiſtantes, qui vocentur p & π. Cum itaque HA & DB in oppoſitas partes moveantur, per Cor. VI. Prop. III. erit $\pm HA.p \mp DB.\pi = \overline{HA + DB}.li$. Sed per præſentem Prop. ſunt $HA.p$ & $DB.\pi$ ſuperficies, quæ a lineis HA & DB in rotatione plani HAEDB circum axem in E deſcribuntur. Ergo etiam dictarum ſuperficierum differentia eſt $= \overline{HA + DB}.li$.

Cor. II. *fig.* 11. Sit figuræ CAEDB planum ad planum tabulæ hujus normale, ita tamen, ut DEB ſupra tabulam emineat, CEA vero infra illam hæreat, curvaque CED punctum flexus contrarii habeat in E, ſed partes ED & EC ejusdem ubique ſint curvedinis. Sint DB & AC curvæ ex evolutione linearum ED & EC deſcriptæ, atque *cd* & *ab* ſint duæ aliæ curvæ,

qua-

quarum centra gravitatis moventur in lineis BD & AC; ita tamen ut *cd* & *ab* in descensu suo versus tabulam, ad ipsam ubique sint parallelæ; evidens est, quod hocce motu linearum *cd* & *ab* describentur superficies *ungviformes*. Dico: differentiam superficierum dicto modo genitarum esse æqualem facto ex $ab + cd$ in Ff, viam centri gravitatis communis curvarum *ab* & *cd* dum superficies formant. Quoniam evolutæ EC, ED, ejusdem sunt curvedinis; erunt quoque curvarum AC & BD respectiva elementa parallela; ergo quoque portiones ipsius Ff, elementis singulis curvarum AC & BD respondentes, erunt illis parallelæ. Cum igitur *cd* & *ab* in oppositas moveantur plagas, erit per Cor VI. Prop. III. $\pm cd.\, BD \mp ab.\, AC = \overline{ab + cd}.\, Ff$. Sed per præsentem Prop. sunt $cd.\, BD$, $ab.\, AC$ superficies *ungviformes*, quæ a lineis *cd* & *ab* in descensu ipsarum formantur. Ergo dictarum superficierum differentia est $= \overline{ab + cd}.\, Ff$. Et si $ab = cd$; erit $ab + cd = 2ab$; adeoque superficierum harum differentia est æqualis duplo rectangulo $ab.\, Ff$.

PROPOSITIO VI. *Theorema. fig. 12.*

Solidum quodvis est æquale facto ex area figuræ genetricis in viam, quam hujus centrum gravitatis sub formatione solidi describit.

I:o Dividatur figura genetrix BADF per lineas rectas CH, DF, &c in areolas infinite parvas CDFH, DF, &c quæ juxta lineas normales Cc, Dd, &c descendunt; evidens est, quod hæ areolæ in suo descensu solidum $AabB$ formabunt. Sit G centrum gravitatis

 vitatis

vitatis figuræ BADF, quod interea, dum spatiola CDHF, DF, &c perveniunt in *cdhf*, *df*, &c, movetur per G*g*. Cum itaque spatiola dicta pro totidem pondusculis haberi possint, per Cor VI. Prop. III. erit $\int$ CDHF. C*c* $=$ G*g*. $\int$ CDHF. Est autem $\int$ CDHF. C*c* seu summa omnium elementorum solidorum C*f*, D*f*, &c æqualis integro solido A*ab*B, atq; $\int$ CDHF æqualis areæ figuræ genetricis. Constat itaque propositum.

II:o Si figura solida formetur per rotationem figuræ planæ circum datam rectam lineam velut axem; sit G*gb*B figura genetrix, cujus centrum gravitatis est in K, atque axis rotationis G*g*. Ducatur semiordinata *ln* alteri L*m* infinite propinqua; erit L*mnl* unum elementum figuræ G*gb*B, cujus centrum gravitatis *i* est in medio ejus. Sit π peripheria, quam centrum *i* in rotatione figuræ genetricis describit; & *p* peripheria, quam centrum *K* eodem tempore conficit. Quoniam itaque elementorum centra gravitatis moventur in circulis, quorum plana sunt inter se parallela; erit per Cor. VI. Prop. III. $\int$ L*mnl*. $\pi = p$. $\int$ L*mnl*. Est autem L*mnl*. π cylindrulus, cujus basis est circulus radio L*m* descriptus; altitudo autem pars axis L*l*, quorum etiam cylindrulorum summa est æqualis solido A*ab*B; atque $\int$ L*mnl* est area figuræ genetricis G*gb*B. Ergo solidum A*ab*B est æquale facto ex figura genetrice in viam, quam centrum gravitatis ejusdem sub ipsa rotatione conficit. Idem prorsus erit demonstrationis tenor pro conis & conoidibus, quæ oriuntur si figura genetrix fuerit vel triangulum vel curva qualiscunque. Q. *e*. *d*.

Analy-

Analytice. Retentis iisdem significationibus litterarum, r, p, x, y, quas in Prop. V. dedimus, sit z centri gravitatis figuræ genetricis distantia ab axe, eodem ferme modo demonstrabimus, quod in nostro casu sit $\int pyydx : zr = pz. \int ydx : r$. Ex qua æquatione præsentis propositionis veritas denuo constat.

COR. I. *fig.* 9. Sit planum figuræ H2Hb ad planum tabulæ nostræ normale, ita ut b2H tabulam contingat, atque circum curvam H2H sit convoluta figura quædam plana, ejusdem ubique latitudinis, quam repræsentat $\alpha\beta = a$. Porro evolvatur planum hoc H2H. $\alpha\beta$, incipiendo ab H; ita tamen, ut linea $\alpha\beta$ semper sit parallela plano tabulæ; perspicuum est, hocce motu figuræ complicatæ H2H. $\alpha\beta$ generari solidum *ungviforme*. Dico: soliditatem hujus *Ungvis* esse æqualem facto ex figura genetrice H2H. $\alpha\beta$ in Cc viam centri gravitatis ejusdem sub ipsa evolutione. Si curva H2H in singulis sui punctis a viribus æqualibus mota fuisset, elementum quodvis areæ H2Hb, quam curva, dum evolvitur, verrit, seu Gi.Oo esset = H2H. bd, per COR. I. Prop. IV. Ut vero figura evolvatur, singulis lineis $\alpha\beta$, &c latitudinem ejus constituentibus æquales insint vires motrices, adeoque cum curva H2H etiamnum in singulis punctis a viribus æqualibus moveatur; erit quoque in nostro casu Gi. Oo = H2H. bd. Multiplicetur utrumque æquationis hujus membrum per a, erit a. Gi. Oo = a. H2H. bd. & integrando $\int a$. Gi. Oo = $\int a$. H2H. bd = a .H2H. $\int bd$ (ob a. H2H constans). Est autem prisma a.Gi. Oo elementum solidi *ungviformis*, cujus proinde soliditas est $\int a$. Gi.Oo; atq; $\int bd$ = Cc; ergo solidum propositum est = a. H2H. Cc. COR. II.

Cor. II. *fig.* 11. Iisdem poſitis, ac in Cor. I. Prop. V. hac tantum cum differentia, quod AH & DB non ſint lineæ, ſed ſegmenta quædam figurarum, quorum centra gravitatis in motu plani deſcribunt arcus p & π; Dico: differentiam ſolidorum per motum plani HAEDB a ſegmentis curvarum HA & DB deſcriptorum eſſe æqualem facto $\overline{HA + DB}.\,Ii$, poſita Ii via centri gravitatis communis ſegmentorum. Cum enim AH & DB ad oppoſitas partes in planis parallelis moveantur, erit per Cor. VI. Prop. III. $\pm HA.p \mp DB.\pi = \overline{AH + DB}.\,Ii$. Sed per præſentem Prop. ſunt HA. p & DB. π ſolida, quæ a ſegmentis AH & DB conficiuntur, conſtat itaque propoſitum.

Cor. III. *fig.* 11. Sint *cd* & *ab* ſegmenta curvarum, quorum centra gravitatis moveantur in curvis ex evolutione deſcriptis DB & AC; reliqua autem eadem maneant, ac in Cor. II. Prop. V; dico, differentiam ſolidorum, quæ generantur per deſcenſum ſegmentorum *cd* & *ab* fore æqualem facto $\overline{cd + ab}.\,Ff$, poſita Ff via centri gravitatis ſegmentorum in formatione figurarum ſolidarum. Segmenta enim *cd* & *ab* ſunt ponduſcula, quæ moventur in planis parallelis ſed verſus oppoſitas partes, ut in Cor. cit. Ergo etiam erit $\pm cd.\,DB \mp ab.\,AH = \overline{cd + ab}.\,Ff$ per Cor. VI. Prop. III.

Cor. IV. *fig.* 10. Sit CAEDB figura plana terminata curva CED, quæ punctum recurvi habet in E, lineis AC & DB ſive rectis ſive curvis, atque axe AEB. Cogitemus porro hanc figuram circum axem AEB rotari. Dico, conoidem duplicem, quæ generatur

tur

tur per motum figurarum ACE, DEB fore æqualem facto ex ACE + EDB in peripheriam, quam centrum gravitatis commune f harum figurarum sub ipsa rotatione conficit. Sint γ & g centra gravitatis figurarum ACE & EDB, in quibus sint posita duo corpora A & B, quæ inter se eandem habeant rationem, ac ipsæ figuræ; evidens est, quod horum centrum gravitatis commune coincidet cum f. Cum itaque in rotatione figuræ CAEDB pondera A & B centrumque gravitatis f describant circulos, quorum plana sunt inter se parallela, si $\Gamma\gamma$ & Gg sint centrorum γ & g distantiæ ab axe, atque ratio radii ad peripheriam fuerit $1 : p$; erit (per Cor. VI. Prop. III.) $A.p.\Gamma\gamma + B.p.Gg = \overline{A+B}.p.Ff$. Et si in locum A & B substituantur figuræ ACE & EDB; erit $ACE.p.\Gamma\gamma + EDB.p.Gg = \overline{ACE+EDB}.p.Ff$. Enimvero $ACE.p.\Gamma\gamma$ & $EDB.p.Gg$ sunt soliditas Conoidis duplicis modo dictæ, per præsentem Prop.; constat itaque propositum. Si autem planum terminatum fuisset curva CED fig. 11, quæ punctum flexus contrarii habet in E, atque planum CAEDB circum rectam lineam AEB revolvatur; pari prorsus ratione demonstratur, differentiam Conoidum per rotationem figurarum ACE & EDB formatarum fore æqualem facto ex ACE + EDB in peripheriam, quam centrum gravitatis commune f harum figurarum sub ipsa rotatione conficit.

Schol. I. Non dubito, quosdam futuros, qui explicatam hanc theoriam nimis compositam arguant, propter introductam ideam centri gravitatis; præsertim cum colligant, nullam omnino gravitatem, adeoque nec centrum gravitatis ullum figuris Geometricis competere. Sciendum autem est, quod Geometræ considerent figuras quasvis oriri ex certis fluentibus quantitatibus, quarum diverso fluxu diversæ nascantur figuræ. Enimvero quantitates moveri nequeunt, nisi a suis viribus; fluxusque diversitas a virium diversa ratione & relatione pendet; quæ ratio inter alias methodos etiam determinatur, quærendo in linea vel plano tale punctum, ut vires ab utraque hujus puncti parte in æquilibrio subsistant. Quo quidem simplicissimo modo statim incidimus in illud punctum, quod centrum gravitatis appellare placuit, cujus proinde idea etiam absque gravitatis concursu consistere potest.

SCHOL. II. Ex demonstrationibus Schol. & Cor. I. Prop. IV., casus II. Prop. V, & casus II. Prop. VI. sequentem condimus regulam: *Figura ex conversione cujuslibet magnitudinis circa datum punctum aut lineam rectam positione datam oriunda, æquatur facto ex magnitudine genetrice in viam centri gravitatis ejusdem.* Elegantem hanc figurarum Geometricarum proprietatem, quam primus animadvertit *PAPPUS*, atque in suis *Collect. Mathematicis* diserte indicavit, variis exemplis adauxit *GULDINUS* ex ordine Jesuitarum in libro de *Centro gravitatis* circa medium superioris seculi edito. Sed nec *Pappus* nec *Guldinus* ullam demonstrationem hujus regulæ reliquerunt. Non tamen erit diffitendum, quin postmodum demonstrationem ejusdem dederint Mathematici, inter quos merito est nominandus *Jac. HERMANNUS*, qui, cum in sua *phoronomia*

nomia breviſſime illam demonſtraſſet, occaſionem nobis præbuit, eandem altius repetendi atque uberius deducendi. Cæterum, hæc ipſa regula extendi quoque poteſt ad dimetiendas figuras per evolutionem curvarum genitas, ceu Cor. I. & IV. Prop. IV. evicimus, quod ſine demonſtratione in *actis Erudit. Lipſienſ.* pro A:o 1695. p. 493 ſignificaverat Illuſtr. *LEIBNITIUS*.

Schol. III. Meditationes hæ noſtræ multo adhuc prolixiores reddi potuiſſent, niſi delectum ac modum illis ſtatuere voluiſſemus, poſtquam ea, quæ in medium allata fuerunt, theoriæ hujus & univerſalitatem & pulchritudinem affatim loquantur. Ne autem ſola abſtracta faſtidium quoddam lectoribus noſtris moveant; juvat jam a generalibus ad ſpecialia deſcendere, atque ſelectis quibusdam exemplis præcedentes propoſitiones illuſtrare.

Exemplum I. *fig. 13.*

Sit propoſita Cauſtica quædam per reflexionem, ex. gr. Parabolica; invenienda eſt quadratura ſpatii contenti inter dictam Cauſticam, curvam ex evolutione hujus deſcriptam, atque radium oſculi quemcunque.

Sit AMB parabola Apolloniana, cujus axis eſt recta linea AF. Concipiamus porro radios lucis numero infinitos atque inter ſe parallelos perpendiculariter incidere in dictum axem, quales ſunt PM, *pm*, qui in curvam AMB illapſi ab eadem reflectuntur; ſingulique radii reflexi tangant curvam quandam ANF, quæ dicitur *Cauſtica parabolæ per reflexionem.* Evolvatur curva ANF incipiendo ab A, ſitque curva ex evolutione descripta AHD; quibus positis, investiganda erit quadratura spatii inter curvam AH, ejus evolutam AN atque radium osculi NMH comprehensi. Sit C centrum gravitatis radii NH, & interea, dum ipse radius verrit sectorem infinite parvum HNh, conficiat centrum C lineolam Cc, quæ est arculus ex centro N descriptus; erit (Cor. I. Prop. IV.) elementum spatii mixtilinei HANMH $=$ NH. Cc; adeoque integra area erit $\int$NH. Cc. Est autem NH $=$ arcui Causticæ AN $=$ PM $+$ MN (ut demonstravit Illustr. Marchio De L' *HOPITAL* in suo libro *Analyse des infiniment petits* sect. VI.) Centro N radio NM describatur arcus MR, sitque parameter parabolæ $=$ a, AP $= x$; erit Pp $=$ MR $= dx$, atque ex natura parabolæ PM $= \sqrt{ax}$, & MN $= \dfrac{\overline{a+4x}.\ \sqrt{ax}}{2a}$. Ergo NH $=$ PM $+$ MN $= \dfrac{\overline{3a+4x}.\ \sqrt{ax}}{2a}$. Porro ob Triangula NMR & NCc similia, erit NM : MR :: NC ($\frac{1}{2}$ HN per Cor. II. Prop. II.) : Cc; seu $\dfrac{\overline{a+4x}.\sqrt{ax}}{2a} : dx :: \dfrac{\overline{3a+4x}}{4a}.\ \sqrt{ax} :$ Cc $= \dfrac{3adx+4xdx}{2a+8x}$. Ergo etiam NH. C$c$ $=$

$$\frac{\overline{3a+4x}.\ \sqrt{ax}}{2a}.\ \frac{3adx+4xdx}{2a+8x} = \frac{9aa+24ax+16xx}{4aa+16ax}.\ dx\sqrt{ax} = \frac{5dx\sqrt{ax}}{4} + \frac{xdx\sqrt{ax}}{a} + \frac{adx\sqrt{ax}}{a+4x}$$

Et, sumtis integralibus singulorum terminorum hujus differenrentialis, erit $\int NH.Cc = \frac{5x\sqrt{ax}}{6} + \frac{2xx\sqrt{ax}}{5a} + \int \frac{adx\sqrt{ax}}{a+4x}$. Deniq;, ut obtineamus integrale ultimi termini, sit $a+4x = v$; erit $dx = \frac{1}{4}dv$. & $\sqrt{ax} = \frac{1}{2}\sqrt{av-aa}$. Ergo $\frac{adx\sqrt{ax}}{a+4x} = \frac{adv\sqrt{av-aa}}{8v} = \frac{aavdv - a^3dv}{8v\sqrt{av-aa}} = \frac{aadv}{8\sqrt{av-aa}} - \frac{a^3dv}{8v\sqrt{av-aa}} = \frac{aadx}{4\sqrt{ax}} - \frac{a^3dv}{8v\sqrt{av-aa}}$; hujusque integrale est $\frac{1}{2}a\sqrt{ax} - \int \frac{a^3dv.}{8v\sqrt{av-aa}}$. Evidens autem est, quod ultimus terminus supponat quadraturam sectoris circuli, qui cum facile construi queat, dicatur ipse A, eritque tandem area HANMH $= \frac{5x\sqrt{ax}}{6} + \frac{2xx\sqrt{ax}}{5a} + \frac{a\sqrt{ax}}{2} -$ *sect.* A. Q. e. i.

EXEMPLUM II. *fig.* 14.

Sit FG *curva, quæ descripta sit ope quatuor focorum* A, B, C, D, *sitque* E *centrum gravitatis quatuor horum punctorum* A, B, C, D. *Dico: si ex quinq; his punctis ad duo puncta* F *&* G *pro lubitu in curva assumta, ducantur rectæ lineæ, spatia* AFG, BFG, CFG, DFG *simul sumta semper esse quadrupla spatii* EFG; *si autem quinque sint foci, fore quintupla, & ita porro; adeo ut si* n *fuerit numerus focorum, erit summa dictorum spatiorum æqualis* n. EFG.

Ducatur chorda FG, quæ utrinque ultra F & G, si opus sit, producatur, atque ex singulis punctis A, B, C, D, E, &c in chordam demittantur perpendicudiculares Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. Cogitemus porro focos A, B, C, D, &c totidem esse pondera æqualia, quæ primum in a, b, c, d, &c hærebant, postea autem descenderunt juxta normales aA, bB, cC, dD, &c intereaque motum sit centrum gravitatis commune per Ee; erit per Cor. VII. Prop. III. $Aa + Bb + Cc + Dd +$ &c $= n. Ee$. Consequenter $\frac{1}{2}FG.Aa + \frac{1}{2}FG.Bb + \frac{1}{2}FG.Cc + \frac{1}{2}FG.Dd +$ &c. $= n.\frac{1}{2}FG.Ee$. Est autem $\frac{1}{2}FG.Aa = \triangle AFG$; $\frac{1}{2}FG.Bb = \triangle BFG$; $\frac{1}{2}FG.Ee = \triangle EFG$, &c. Ergo $\triangle AFG + \triangle BFG + \triangle CFG + \triangle DFG +$ &c. $= n.\triangle EFG$. Summa vero segmenti FG toties sumti, quot sint foci curvæ est $= n.FG$. Ergo si æquationis inventæ uni membro addatur dicta summa, alteri autem n. FG; habebimus $AFG + BFG + CFG + DFG +$ &c. $= n. EFG$. Q. e. d.

Elegantissimum hocce theorema Actis Eruditor. Lipsiensibus pro A:o 1695. p. 491. sed sine demonstratione inseruit Nob. Tschirnhaus.

Exemplum. III. *fig.* 15.

Sint in plano quodam puncta quotcunque F, G, H; *invenienda est curva AMB talis, ut si ex puncto ejus quolibet* M *ad dicta puncta ducantur recta lineæ, summa quadratorum ex singulis his lineis sit ubique constans, seu æqualis quantitati datæ* gg.

Concipiamus in F, G, H pondera æqualia a, b, c; sintq; x, y, z, horum ponderum respectivæ distantiæ ab M; erit ex hypothesi $xx + yy + zz = gg$. Ergo $axx + byy + czz = agg$; cujus differentiale $axdx + bydy + czdz = o$. Fiat $MC = MD = ME = 1$; Si itaque concipiacipiamus in C pondus *ax*, in D & E pondera *by*, *cz*, seu pondera, quæ sunt inter se sicut hæc rectangula; linea recta PM, quæ transit per centrum gravitatis commune ponderum & per punctum M erit normalis ad curvam in M. Porro ex punctis C, D, E, demittantur in MP perpendiculares CL, DK, EI, ipsisque parallelæ ducantur FO, GR, HS; erit $FO = x.CL$; $GR = y.DK$; $HS = z.EI$. Ergo linea PM, quæ transit per centrum gravitatis ponderum *ax*, *by*, *cz*, in C, D, E, transibit adhuc per centrum gravitatis ponderum *a*, *b*, *c*, postquam in F, G, H, pervenerunt (vid. De L'*HOPITAL libr. cit. p. 31.*). Moveatur jam punctum M in curva AMB, immotis ac invariatis ponderibus *a*, *b*, *c*; evidens est, quod in hoc casu centrum gravitatis non movebitur; consequenter, cum perpendicularis ad curvam sit recta, quæ conjungit centrum gravitatis ponderum & punctum quodlibet curvæ; curva AMB erit talis, ut omnes lineæ ad illam normales sese intersecent in uno puncto. Erit itaque circulus, ex centro gravitatis communi ponderum in F, G, H, (per Prop. II. inveniendo) ceu centro descriptus. Q. e. i.

Exemplum IV. *fig. 16.*

Sit GIA *semi-Cyclois ordinaria, quam concipiamus totam evolvi, incipiendo ab* A, *sitque* AE *curva ex evolutione descripta atque* GE *radius osculi, qui tangit semi-Cycloidem in puncto* G; *perimetrum* GAE *triplici diverso motu moveri potest, ita tamen ut super-*

ficiem

ficiem describat. I:o *Si perimetrum circum radium* GKE, *ut axem, volvatur, quo motu oritur superficies Conoidis Cycloidalis.* II:o *Si curva* GAE *descendat vel in linea recta, vel* III:o *in linea curva; quibus postremis casibus superficies Ungviformes certi generis proveniunt. His positis, quæruntur superficies tam Conoidis, quam dictorum Ungvium.*

Demonstrant Geometræ, quod curva ex evolutione semi-Cycloidis descripta sit alia semi-Cyclois a sua evoluta nonnisi positione diversa, cujus semi-circulus generator volvitur supra tangentem per A ductam. Sit circuli generatoris diameter AB $=a$, AP $=x$; erit AF $=\sqrt{ax}$, & (per princ. Algebraic.) arcus Cycloidalis AI $=2$AF $=2\sqrt{ax}$; consequenter AIG $=2a$, (ob $x=a$), atque perimetrum integrum GAE $=4a$. Sint porro M & L centra gravitatis arcuum Cycloidalium AG & AE. Igitur, cum hi arcus contrariam habeant positionem, præterea autem nihil a se differant; erunt dictorum centrorum respectivæ distantiæ MP, LQ a lineis AB & GE æquales. Ducatur ML, quæ bisecetur in N; erit ob curvas AG & AE æquales, centrum gravitatis totius perimetri in N; atque ob MP $=$ LQ, centri N distantia NK ab axe rotationis GE erit $=\frac{1}{2}$ BG. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $r:p$; erit NK $=ap:8r$. Fiat porro $r:p::$ NK $\left(\frac{ap}{8r}\right)$ ad quartum, erit hic $app:8rr$ via centri gravitatis, quam illud in rotatione figuræ dedescribit. Ergo superficies Conoidis Cycloidalis pro-

positæ

positæ erit $=$ *aapp*: $2rr$ (per Prop. V.). Ergo eadem superficies est æqualis quadrato, cujus latus est quarta proportionalis ad $r\sqrt{2}$, p & a.

Si perimetrum GAE descendat versus planum datum motu sibi ipsi parallelo, elementaque perimetri moveantur vel in lineis rectis parallelis, vel in curvis similibus & æquidistantibus, dicaturque b via quam centrum gravitatis perimetri absolvit; erit (per Prop. V.) Superficies ungvis Cycloidalis sic genitæ æqualis $4ab$ seu quadruplo rectangulo ab. Q. e. i.

Exemplum V. *fig.* 17.

Invenire solidum formatum ex revolutione sectoris circuli ACB *circa radium* CB *tanquam axem.*

Dividatur chorda AB bifariam in O, ductaque CO, erit centrum gravitatis hujus sectoris in recta CO. Centro C radio quocunque CP describatur arcus MPM, ipsique infinite propinquus alius arcus *mpm*. Sit CA $= a$, AB $= b$, CP $= x$, peripheria radio CA descripta $= c$, arcus AB $= \frac{s}{n} c$.

Quoniam segmentum annulare *m*MPM*m* considerari potest instar pondusculi ex centro C suspensi, idemque insuper sit æquale MPM. M*m*; erit momentum dicti segmenti annularis æquale momento arcus MPM ducto in M*m*. Est autem momentum arcus AB (ab) ad momentum arcus MPM, sicut triangulum ACB ad triang. MCM, velut $\overline{AC}^2$ (aa) ad $\overline{CM}^2$ (xx); sunt enim hæc triangula similia. Ergo

E momen-

momentum arcus MPM $= \frac{abxx}{aa} = \frac{bxx}{a}$; hoc momentum ductum in Mm (dx) dat $\frac{bxxdx}{a}$; cujus integrale $\frac{bx^3}{3a}$ est momentum sectoris MCM. Porro est summa ponderum seu segmentorum annularium $=$ *sect.* MCM $= \frac{1}{2}$ MPM. MC $= cxx : 2an$. Quare si $bx^3 : 3a$ dividatur per $cxx : 2an$, quotus $2nbx : 3c$ dabit distantiam centri gravitatis a C in sectore MCM (Cor. VIII. Prop. III.). Et si loco x ponatur a; erit $2abn : 3c =$ FC $=$ distantiæ centri gravitatis sectoris ACB a centro C. Ex F demittatur FG normalis in radium CB; erit AC : CF :: OB : FG, seu $a : \frac{2abn}{3c} : \frac{1}{2}b :$ FG $= bbn : 3c =$ distantiæ centri gravitatis F ab axe rotationis. Fiat rursus $a : c :: \frac{bbn}{3c}$ ad quartum $\frac{bbn}{3a}$, qui est peripheria radio FG descripta, quæ multiplicetur per sectorem ACB $= \frac{ac}{2n}$; erit solidum quæsitum $= \frac{abbc}{6a} = \frac{1}{6}bbc$ (per Prop. VI.). Sed conus rectus, cujus radius baseos a atque altitudo b est æqualis $\frac{1}{6}abc$. Ergo solidum quæsitum est ad conum rectum modo dictum sicut $b : a$. Q. e. i.

Cor. Si arcus AB sit 60°; erit $a = b$, atque solidum ex rotatione sectoris ACB genitum æquale cono recto, cujus radius baseos & altitudo est a.

)o(

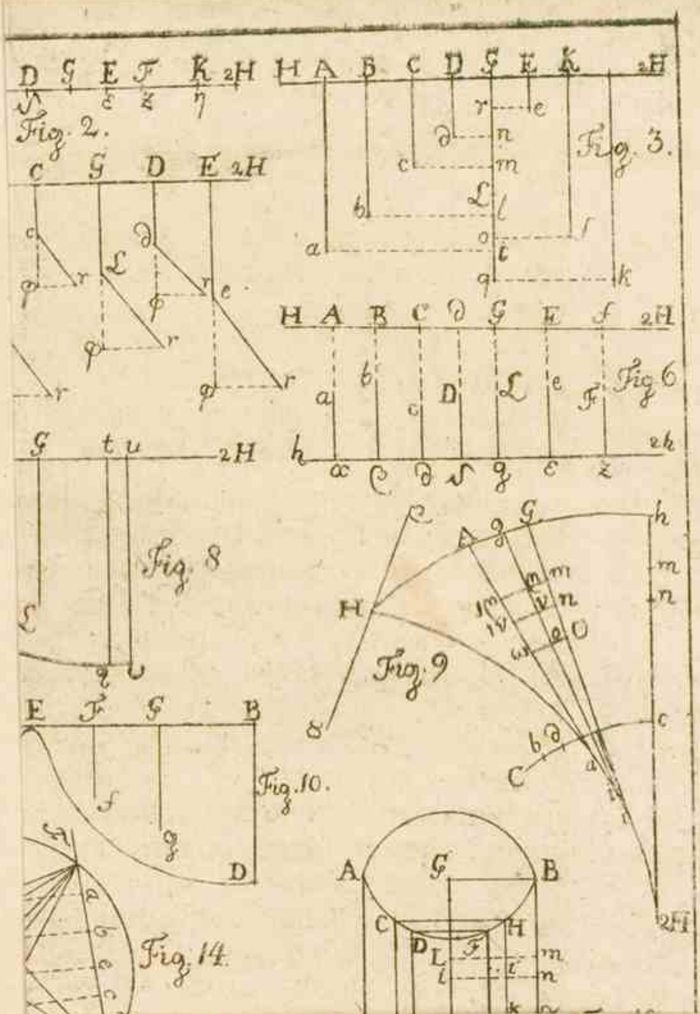
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 6
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 14.

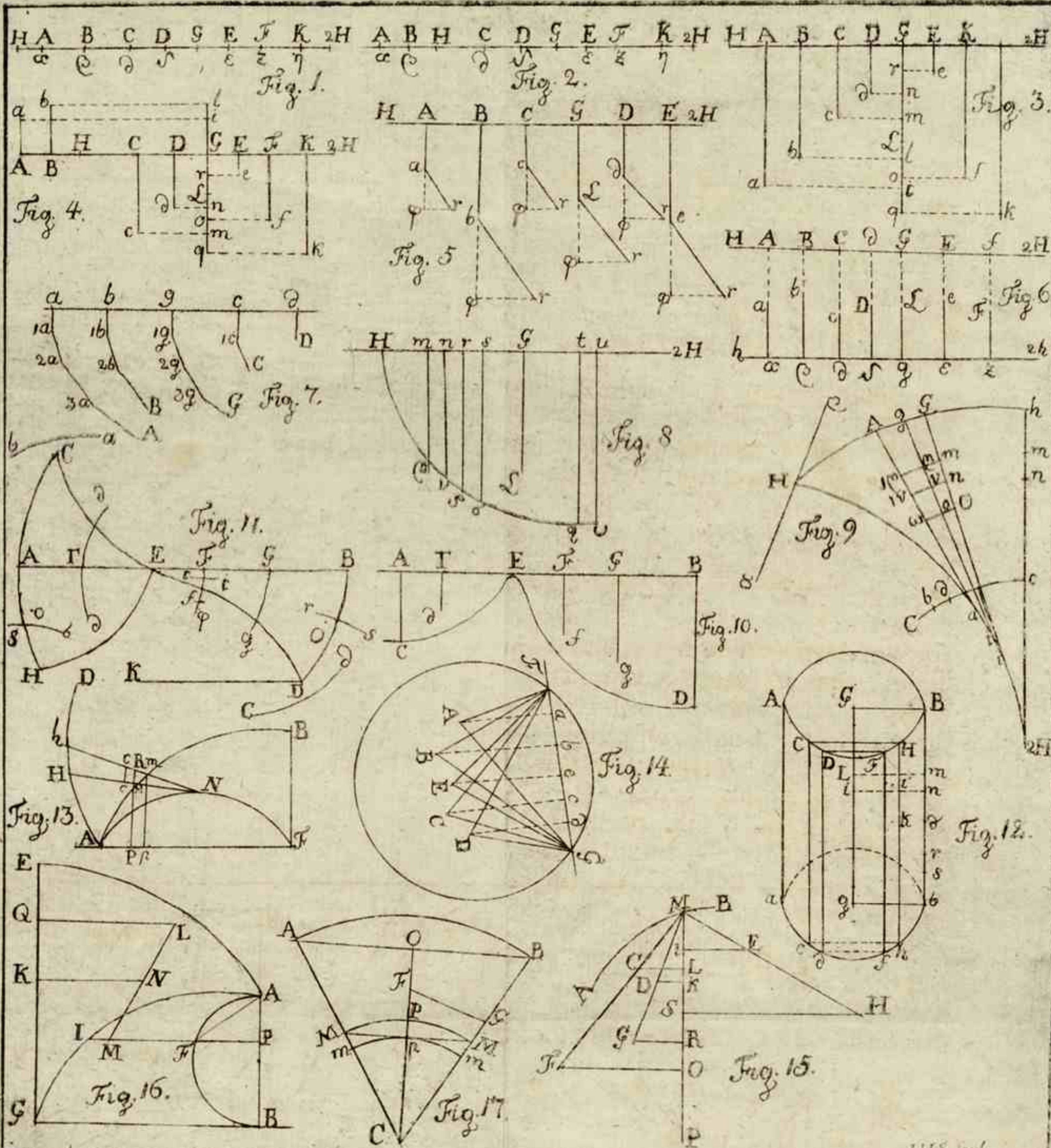
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.